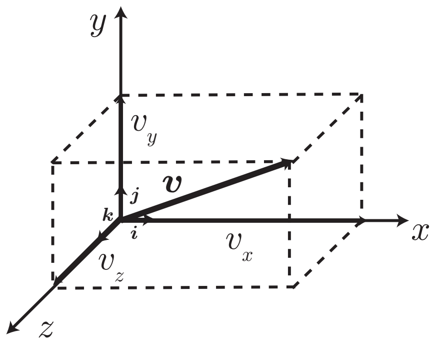
Základní rovnice pro metodu CFD

V kapitole budou odvozeny základní rovnice v diferenciální formě užívané při numerickém řešení toku tekutin. Vždy předpokládáme spojité prostřední, tj. platnost kontinua. Nejdříve objasníme základní matematický aparát užívaný v mechanice kontinua.

1 Vektorové operace

Skalár (z lat. scala, stupnice) je veličina (teplota, hustota, energie, objem, čas, ...), jejíž hodnota je v daných jednotkách plně určena jediným číselným údajem. **Skalární pole** je funkce přiřazující skalár v každém bodě prostoru nebo čase. Příkladem může být teplotní pole v nějakém prostoru, kdy teplota se může měnit s místem a časem. Teplotní pole tedy charakterizuje rozložení teploty a jeho změny v prostoru a čase.

Vektory jsou fyzikální veličiny, které jsou kromě velikosti určeny také směrem. V tištěném textu budeme vektory označovat polotučnou kurzívou (např. $\boldsymbol{a}$). Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ popisují úplně velikosti jeho průmětů (složek rychlosti) v_x, v_y, v_z na souřadnicové osy x, y, z.



Obr. 1: Průměty vektoru rychlosti na osy souřadnic.

Zavedeme-li ve směru souřadnicových os x, y, z jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, pro které platí $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k}$ a $|\,\boldsymbol{i}\,| = |\,\boldsymbol{j}\,| = |\,\boldsymbol{k}\,| = 1$, vektor se dá analyticky vyjádřit

$$\boldsymbol{v} = v_x\,\boldsymbol{i} + v_y\,\boldsymbol{j} + v_z\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

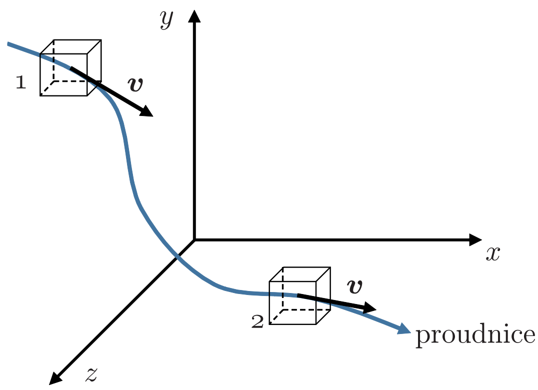
Velikost vektoru je dána vztahem

$$|\,\boldsymbol{v}\,| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2}$$

1.1 Substanciální (materiálová) derivace skalární veličiny

Substanciální derivace je zvláštní druh totální derivace „sledující pohyb“. Udává rychlost změny sledované veličiny tak, jak ji vnímá pozorovatel pohybující se společně s tekutinou. Substanciální derivaci skalární veličiny odvodíme pro případ hustoty. Budeme vyšetřovat pohybující se objemový element tekutiny, který se pohybuje po proudnici stejnou rychlostí jako je rychlost proudu tekutiny, viz obr. 2. Ve sledovaném objemovém elementu předpokládáme konstantní hmotnost částic, ale při pohybu prostorem se může element deformovat (stlačovat nebo expandovat působením sil v tekutině). Tím se může měnit jeho objem a uzavřená plocha, která jej ohraničuje. Hustota je proto funkcí prostoru a času $\rho = \rho(x,\ y,\ z,\ t)$

- v čase t_1 je objemový element v místě 1: $\rho_1 = \rho(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$,



Obr. 2: Pohyb elementárního objemu po proudnici.

- čase t_2 je objemový element v místě 2: $\rho_2 = \rho(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$.

Hustota je funkcí více proměnných, $\rho = \rho(x,\ y,\ z,\ t)$, funkci můžeme rozvinout v Taylorovu řadu

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x}\,(x_2 - x_1) + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,(y_2 - y_1) + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,(z_2 - z_1) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,(t_2 - t_1) \tag{3}$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4}$$

pro krátký časový okamžik platí

$$\lim_{t_1 \to t_2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} \qquad \text{(substanciální derivace hustoty)} \tag{5}$$

$$\lim_{t_1 \to t_2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \equiv v_x \qquad \lim_{t_2 \to t_2} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \equiv v_y \qquad \lim_{t_2 \to t_2} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \equiv v_z \tag{6}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,v_z + \frac{\partial \rho}{\partial t}} \tag{7}$$

Při vektorových diferenciálních operacích se často využívá vektorový diferenciální operátor **nabla** ∇, který má složky jako vektor, ale nemůže existovat sám, nýbrž musí působit na skalární, vektorovou nebo tenzorovou funkci. Operátor nabla je v pravoúhlých kartézských souřadnicích definován jako

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad [\mathrm{m}^{-1}] \tag{8}$$

Substanciální derivace hustoty vyjádřená pomocí operátoru nabla má tvar

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho} \tag{9}$$

1.2 Totální diferenciál

Totální diferenciál je v matematice diferenciál aplikovaný na funkci několika proměnných a umožňuje aproximovat danou funkci lineární funkcí poblíž daného bodu.

Totální diferenciál pro funkci hustoty $\rho = \rho(x,\ y,\ z,\ t)$:

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv v_x \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \equiv v_y \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \equiv v_z \tag{12}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,v_z + \frac{\partial \rho}{\partial t}} \tag{13}$$

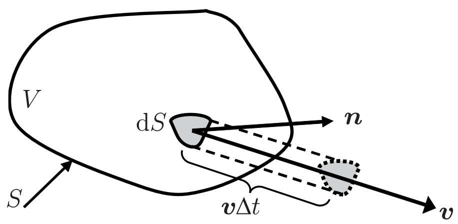
Totální diferenciál je v podstatě to samé jako substanciální derivace.

1.3 Divergence rychlosti

Fyzikální význam divergence vektoru rychlosti je objemové množství tekutiny, které vyteče z jednotkového objemu za jednotku času, tzn. vydatnost tohoto objemu jakožto *zřídla* kapaliny. Divergence vektoru je skalár.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{14}$$

Pro vysvětlení si vymezíme základní (kontrolní) objem tekutiny, který se pohybuje společně s tekutinou (stejnou rychlostí). Celková hmota částic v základním objemu je stejná a neměnná v čase. S časem a místem se může původní kontrolní objem měnit (deformace, smrštění, expanze kontrolního objemu), ale celková hmotnost částic bude stále konstantní. Při změně objemu se bude měnit také plocha a hustota (díky konstantní hmotnosti částic). Na povrchu si vymezíme diferenciální plochu dS, která se pohybuje lokální rychlostí $\boldsymbol{v}$, viz obrázek 3.



Obr. 3: Pohybující se objem tekutiny pro fyzikální vysvětlení pojmu divergence rychlosti.

Změna objemu původního kontrolního objemu ve směru proudu, ΔV, odpovídá objemu dlouhého tenkého válce se základnou dS a výškou $(\boldsymbol{v}\,\Delta t)\cdot\boldsymbol{n}$, kde $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor kolmý na plochu dS.

$$\Delta V = [(\boldsymbol{v}\,\Delta t)\cdot\boldsymbol{n}]\,\mathrm{d}S = (\boldsymbol{v}\,\Delta t)\,\mathbf{d}\boldsymbol{S} \qquad\qquad \mathbf{d}\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{15}$$

Za časovou změnu Δt je celková změna objemu rovna sumě přes celou plochu. V případě, že d$S \to 0$, suma se stává plošným integrálem

$$\oint\!\!\!\oint_S (\boldsymbol{v}\,\Delta t)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{16}$$

Pokud integrál podělíme časovým krokem Δt, tak dostaneme z fyzikálního pohledu, časovou změnu kontrolního objemu označenou $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t}$

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\Delta t} \oiint\limits_S (\boldsymbol{v}\, \Delta t) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \oiint\limits_S \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{(substanciální derivace objemu)} \tag{17}$$

Na tok vektorového pole uzavřenou jednoduše souvislou hladkou plochou můžeme použít Gaussovu-Ostrogradského větu

$$\oiint\limits_S (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}S \equiv \oiint\limits_S \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \iiint\limits_V (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}V \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t} = \oiint\limits_S \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t} = \iiint\limits_V (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}V \tag{19}$$

Pro elementární objem δV může být výše uvedená rovnice zapsána

$$\frac{\mathrm{D}(\delta V)}{\mathrm{D}t} = \iiint\limits_{\delta V} (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}V \quad . \tag{20}$$

Předpokládáme, že δV je tak malý, že $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ má v celé δV stejnou hodnotu, potom integrál v předcházející rovnici je nahrazen výrazem $(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\, \delta V$

$$\frac{\mathrm{D}(\delta V)}{\mathrm{D}t} = (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\, \delta V \tag{21}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{\delta V} \frac{\mathrm{D}(\delta V)}{\mathrm{D}t}} \tag{22}$$

Divergence vektorového pole = změna objemu v čase pohybujícího se elementu tekutiny vztažená na jednotku objemu.

2 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity je bilance hmotnostního toku. Uvedeme dva přístupy odvození rovnice kontinuity: a) sledovaný elementární objem tekutiny se pohybuje s tekutinou, b) elementární objem tekutiny je fixní v prostoru.

2.1 Element tekutiny se pohybuje po proudnici

Sledovaný objemový element tekutiny, δV, se pohybuje po proudnici stejnou rychlostí jako okolní tekutina (obr. 2). V objemovém elementu předpokládáme konstantní hmotnost částic, δm, neměnnou s časem (změna hmotnosti s časem je nulová)

$$\frac{\mathrm{D}(\delta m)}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{23}$$

Působením sil v tekutině na sledovaný element se může měnit jeho objem a hustota

$$\frac{\mathrm{D}(\delta m)}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\mathrm{D}(\rho\, \delta V)}{\mathrm{D}t} = \delta V \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \frac{\mathrm{D}(\delta V)}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\left[\frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{D}(\delta V)}{\mathrm{D}t}\right] = 0 \tag{25}$$

Výraz v hranaté závorce nahradíme divergencí rychlosti (viz předcházející kapitola)

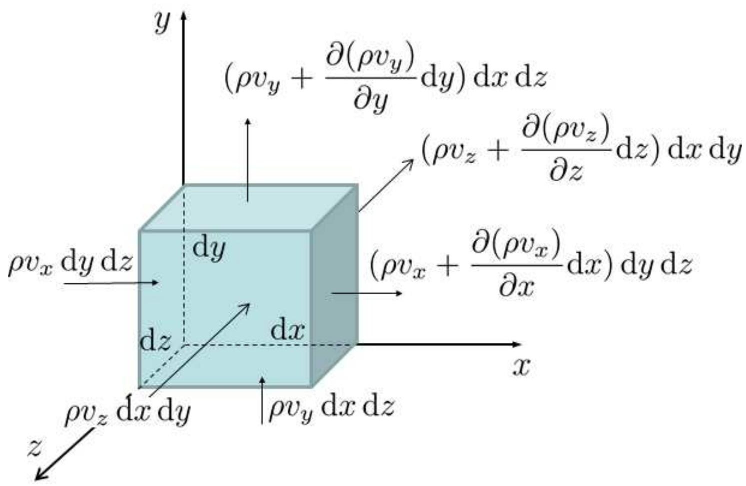
$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{D}(\delta V)}{\mathrm{D}t} \tag{26}$$

a získáme výsledný výraz pro rovnici kontinuity

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\,\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0} \tag{27}$$

2.2 Element tekutiny je fixován v prostoru

Druhý způsob odvození rovnice kontinuity si ukážeme pro objemový element tekutiny, který je nehybně umístěný v prostoru. Tekutina vtéká/vytéká do/z elementu a může docházet k akumulaci/propadu tekutiny v elementu, viz obr. 4.



Obr. 4: Tok tekutiny skrz fixní objemový element tekutiny.

Stěny elementárního objemu budeme považovat za hranici bilančního systému a uděláme diferenciální bilanci hmotnostního toku tekutiny

$$\begin{aligned} \text{VSTUP} - \text{VÝSTUP} &= \text{AKUMULACE} \\ \mathrm{d}\dot{m}_{in} - \mathrm{d}\dot{m}_{out} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\mathrm{d}\dot{m}_{in} = \mathrm{d}\dot{m}_{in,x} + \mathrm{d}\dot{m}_{in,y} + \mathrm{d}\dot{m}_{in,z} = \rho v_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \rho v_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \rho v_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\dot{m}_{out} &= \mathrm{d}\dot{m}_{out,x} + \mathrm{d}\dot{m}_{out,y} + \mathrm{d}\dot{m}_{out,z} \\ &= \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left[\rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \left[\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{31}$$

Dosazením členů do bilanční rovnice dostaneme

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{32}$$

úpravou získáme základní vyjádření rovnice kontinuity

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0} \tag{33}$$

Další způsoby vyjádření rovnice kontinuity

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0} \tag{34}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0} \tag{35}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{v}) = 0} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{v}) &= v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho}_{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}} + \rho\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{38}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0} \tag{39}$$

Poslední výraz dokazuje, že platí jedna rovnice kontinuity bez ohledu, zda ji odvozujeme pro fixní nebo pohyblivý objemový element tekutiny.

3 Navierovy-Stokesovy (pohybové) rovnice

Pohybové rovnice patří společně s rovnicí kontinuity mezi základní rovnice popisující proudění tekutin. Pro odvození budeme uvažovat pohybující se objemový element tekutiny po proudnici dle obr. 2. Podle druhého Newtonova zákona ($m\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$) je časová změna hybnosti tekutiny v elementárním objemu rovna součtu všech sil působící na kontrolní objem

$$\delta m \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \delta \boldsymbol{F} \tag{40}$$

Časovou změnu hybnosti tekutiny v elementárním objemu odvodíme pro směr osy x

$$\rho \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} \underbrace{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}_{\delta V} = \delta \boldsymbol{F_x} \tag{41}$$

Materiálovou derivaci složky rychlosti ve směru x můžeme vyjádřit (viz podkapitola Vektorové operace)

$$\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\,v_x \tag{42}$$

Hustota a rychlost je funkcí prostoru a času, $\rho = \rho(x, y, x, t); v_x = v_x(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial(\rho\,v_x)}{\partial t} = \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\,v_x)}{\partial t} - v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{43}$$

$$\nabla\cdot(\rho\,v_x\,\boldsymbol{v}) = v_x\,\nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{v}) + (\rho\,\boldsymbol{v})\cdot\nabla\,v_x \quad\Rightarrow\quad \rho\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\,v_x = \nabla\cdot(\rho\,v_x\,\boldsymbol{v}) - v_x\,\nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{v}) \tag{44}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\rho\,v_x)}{\partial t} - v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial t} - v_x\,\nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(\rho\,v_x\,\boldsymbol{v}) \tag{45}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\rho\,v_x)}{\partial t} - v_x\,\underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\boldsymbol{v})\right]}_{=0\text{ (rov. kontinuity)}} + \nabla\cdot(\rho\,v_x\,\boldsymbol{v}) \tag{46}$$

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\rho\,v_x)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,v_x\,\boldsymbol{v})} \tag{47}$$

Další formy zápisu

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\rho\,v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\,v_x\,v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\,v_x\,v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\,v_x\,v_z)}{\partial z}} \tag{48}$$

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\rho\,v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\,v_i\,v_j)}{\partial x_j}} \tag{49}$$

Časovou změnu hybnosti kontrolního objemu tekutiny lze také vyjádřit pomocí totálního diferenciálu

$$\delta m\,\boldsymbol{a} = \delta m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{50}$$

ve směru osy x platí $v_x = v_x(x, y, z, t)$

$$\mathrm{d}v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial v_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{51}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v_x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{v_y} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}_{v_z} \tag{52}$$

$$\boxed{\delta m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} \tag{53}$$

Ačkoliv to není na první pohled patrné, oba způsoby odvození (jak pomocí materiálové derivace, tak totálního diferenciálu) vedou ke stejnému výsledku. Použijeme pravidlo pro derivaci součinu tří funkcí

$$\frac{\mathrm{d}(U\,V\,W)}{\mathrm{d}x} = U\,V\,\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + U\,W\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} + V\,W\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{54}$$

pro výsledek z materiálové bilance

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_z)}{\partial z} = \\
&= \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&+ \rho\, v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho\, v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\, v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial x} \\
&+ \rho\, v_x\,\frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho\, v_y\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x\, v_y\,\frac{\partial \rho}{\partial y} \\
&+ \rho\, v_x\,\frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho\, v_z\,\frac{\partial v_x}{\partial z} + v_x\, v_z\,\frac{\partial \rho}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

upravíme pořadí členů v rovnici

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} &= \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\, v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho\, v_y\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho\, v_z\,\frac{\partial v_x}{\partial z} \\
&+ v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho\, v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\, v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \left(\rho\, v_x\,\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x\, v_y\,\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \left(\rho\, v_x\,\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_x\, v_z\,\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} &= \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\, v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho\, v_y\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho\, v_z\,\frac{\partial v_x}{\partial z} \\
&+ v_x\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} + v_x\,\frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial y} + v_x\,\frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} &= \rho\,\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial v_x}{\partial z}\right] \\
&+ v_x\,\underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial z}\right]}_{=\,0\,\text{(rovnice kontinuity)}}
\end{aligned}
\tag{58}
$$

$$
\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}
\tag{59}
$$

Podobně můžeme rozepsat časovou změnu hybnosti kontrolního objemu tekutiny pro směry y a z.

$$
\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}
\tag{60}
$$

$$
\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\,\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}
\tag{61}
$$

Síly, které způsobí časovou změnu hybnosti reálné tekutiny elementárního objemu mohou být ***objemové*** (hmotnostní) působící na částice v objemu (např. gravitační, odstředivá, Coriolisova) a ***plošné***, které působí na ploše ohraničující objem (tlakové a třecí). Výraz na pravé straně rovnice (40) můžeme rozepsat

$$
\delta\boldsymbol{F} = \underbrace{\delta\boldsymbol{F}_m}_{\text{hmotnostní}} + \underbrace{\delta\boldsymbol{F}_p + \delta\boldsymbol{F}_t}_{\text{plošné}, \,\delta\boldsymbol{F}_s}
\tag{62}
$$

Obecnou hmotnostní sílu vztaženou na jednotku hmotnosti označíme $\boldsymbol{f}$ a f_x její složku ve směru x. Obecnou hmotnostní sílu ve směru osy x vyjádříme

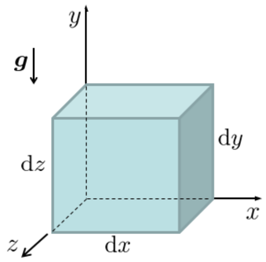
$$\delta \boldsymbol{F}_{m,x} = \rho\, f_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{63}$$

Nejčastější hmotnostní silou je síla gravitační

$$\delta \boldsymbol{F}_{m,G} = \boldsymbol{g}\,\delta m \quad \rightarrow \quad \delta \boldsymbol{F}_{m,G} = \boldsymbol{g}\,\rho\,\delta V \quad \rightarrow \quad \delta \boldsymbol{F}_{m,G} = \boldsymbol{g}\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{64}$$

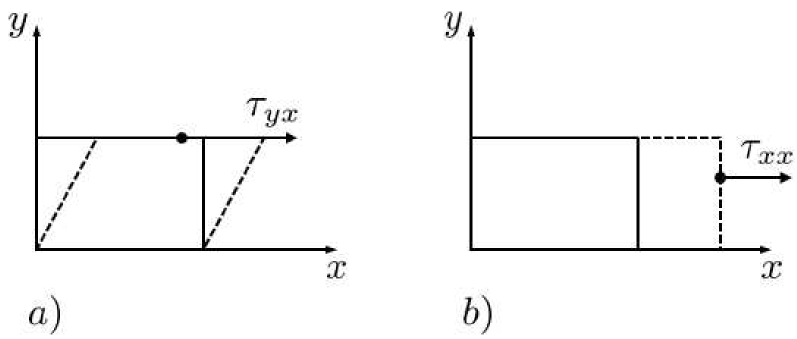
rozepsané do složek

$$\begin{aligned} F_{m,Gx} &= g_x\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ F_{m,Gy} &= g_y\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ F_{m,Gz} &= g_z\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{65}$$



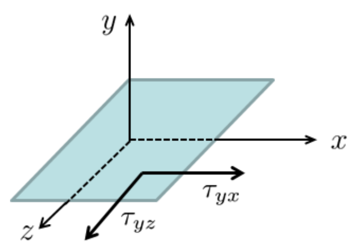
V případě, že gravitační síla bude působit proti směru osy y (viz obrázek), pak $g_x = 0,\ g_y = -g,\ g_z = 0$.

Plošné síly tečné a normálové působí na elementární objem a mohou zapříčinit jeho deformaci, jak je schématicky naznačeno na obr. 5 pro rovinu xy.

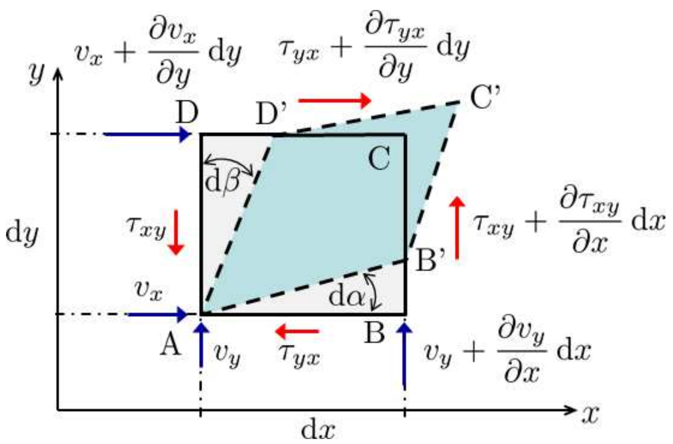


Obr. 5: Schema deformace objemového elementu působením (a) tečných a (b) normálových sil.

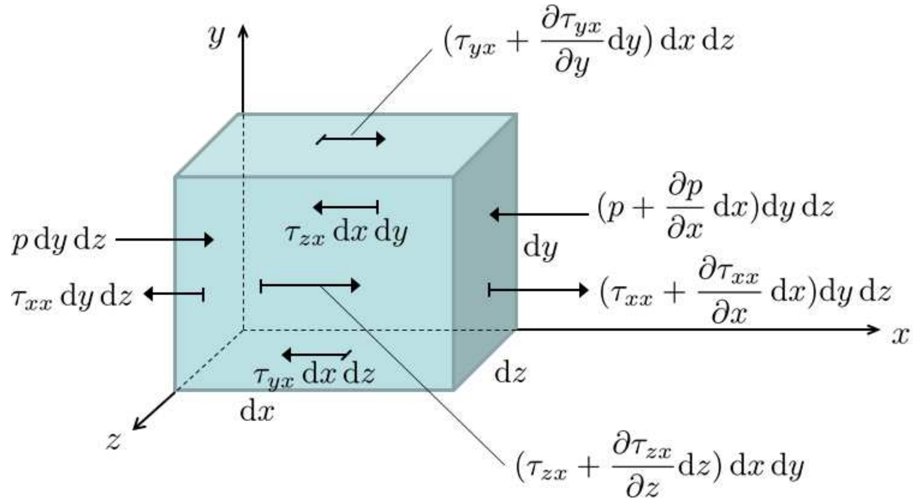
Tečné napětí, označené τ_{yx}, souvisí s rychlostí změny tečné (viskozitní) deformace elementu tekutiny, zatímco normálové napětí, označené τ_{xx}, souvisí se změnou objemu elementu tekutiny. Obě napětí závisí na gradientech rychlosti. Pro většinu reálných tekutin jsou normálová napětí (jako τ_{xx}) daleko menší než tečná napětí a často jsou zanedbávána. Normálová napětí jsou významná v případech, kdy normálové gradienty rychlosti (např. $\partial v_x/\partial x$) jsou velmi vysoké, např. uvnitř rázové vlny (lokální Machovo číslo >> 1). Složky tečného napětí se značí dvěma indexy: první označuje osu na niž je příslušná elementární plocha kolmá, druhý označuje osu s níž je tečné napětí rovnoběžné.



Plošné síly působící na elementární objem ve směru osy x jsou uvedeny na obr. 7. Směr tečných sil je podle konvence, že nárůst složek rychlosti je ve směru příslušných os. Působením tečných sil dochází k deformaci elementu tekutiny ve směrech os, jak je znázorněno na obr. 6.



Obr. 6: Deformace elementu tekutiny vlivem tečných sil v rovině xy.



Obr. 7: Schéma plošných sil ve směru osy x.

Plošné síly ve směru x vyjádříme podle obr. 7, přičemž záporné hodnoty jsou u členů působících proti směru osy x

$$
\begin{aligned}
F_{s,x} &= \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&+ \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) - \tau_{xx}\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) - \tau_{yx}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&+ \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) - \tau_{zx}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{66}
$$

Celková síla ve směru osy x je dána součtem rovnic (63) a (66)

$$
\delta \boldsymbol{F}_{s,x} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \rho\, f_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{67}
$$

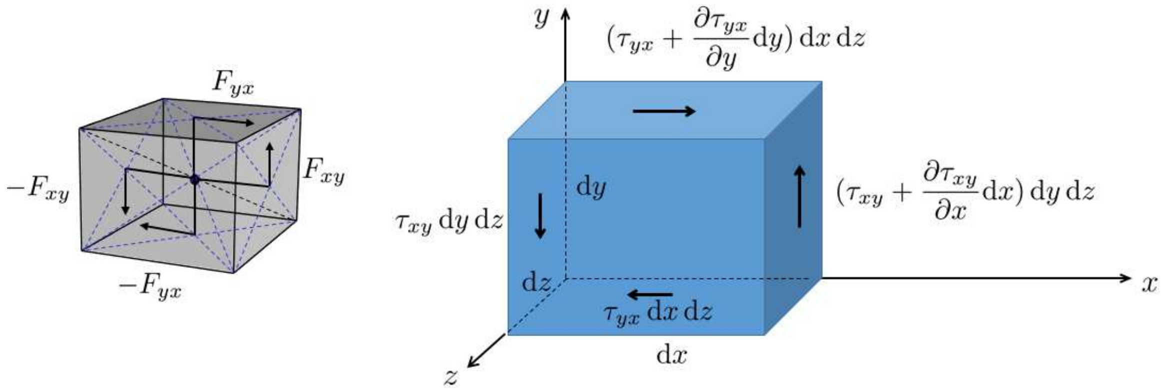
Spojením rovnice vyjadřující časovou změnu hybnosti elementárního objemu (47) s rovnicí (67) dostaneme základní vyjádření Navierovy-Stokesovy rovnice pro směr x

$$
\boxed{\frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\, v_x\, \boldsymbol{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho\, f_x} \tag{68}
$$

podobně pro směry y a z

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\, v_y\, \boldsymbol{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho\, f_y} \tag{69}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\, v_z\, \boldsymbol{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho\, f_z} \tag{70}$$



Obr. 8: Momentová rovnováha tečných sil na objemovém elementu.

Za předpokladu, že působením tečných sil dochází pouze k deformaci objemového elementu a ne k jeho rotaci, můžeme z momentové rovnováhy tečných sil na elementárním objemu, která je vyjádřena k jeho těžišti, viz obr. 8, dostat

$$M_{xy} = M_{yx} \quad \text{kde} \quad M_{xy} = \Delta F_{xy}\frac{\mathrm{d}x}{2} \qquad M_{yx} = \Delta F_{yx}\frac{\mathrm{d}y}{2} \tag{71}$$

dosadíme do momentů sil

$$\left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \tau_{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right]\frac{\mathrm{d}x}{2} = \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \tau_{yx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\right]\frac{\mathrm{d}y}{2} \tag{72}$$

po úpravě

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{73}$$

Ze zbývajících dvou momentových podmínek získáme

$$\tau_{xz} = \tau_{zx},\ \ \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{74}$$

Pro matematické vyjádření tečných sil použijeme Newtonův zákon pro smykové napětí $\tau = \eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$. Při deformaci elementárního objemu se dvě plošky za čas $\mathrm{d}t$ otočí o úhel $\mathrm{d}\gamma_{xy} = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta$ (obr. 6). Z teorie malých deformací, kde α a $\beta \ll 1$ platí

$$\tan \mathrm{d}\alpha \approx \mathrm{d}\alpha \quad , \quad \tan \mathrm{d}\beta \approx \mathrm{d}\beta \tag{75}$$

$$\tan \mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} \tag{76}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_{xy}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} \tag{77}$$

Užitím klasické reologické rovnice, která vyjadřuje, že rychlost deformace je přímo úměrná napětí

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau}{\eta} \tag{78}$$

dostaneme výsledný vztah pro složky tečného napětí

$$\tau_{xy} = \eta\,\frac{\mathrm{d}\gamma_{xy}}{\mathrm{d}t} = \eta\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right) \quad\Rightarrow\quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{79}$$

podobně pro ostatní složky tečného napětí

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \tag{80}$$

Normálové složky, τ_{ii} plošných sil se uplatňují při proudění stlačitelných tekutin. Pro tento typ tekutin Stokes (v roce 1845) navrhl vztahy

$$\tau_{xx} = 2\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{81}$$

$$\tau_{yy} = 2\eta\,\frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{82}$$

$$\tau_{zz} = 2\eta\,\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{83}$$

kde η je dynamická viskozita tekutiny a λ je tzv. druhá viskozita. Stokes odvodil hypotézu, která je dodnes pro plyny používána díky dobré aproximaci

$$\lambda = -\frac{2}{3}\,\eta \tag{84}$$

Tečná a normálová napětí dosadíme do rovnic (68) - (70) a po úpravě získáme Navierovy-Stokesovy rovnice v plném tvaru pro všechny složky

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial t} &+ \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_z)}{\partial z} = \\
&- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] \\
&- \frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \rho\, f_x
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial t} &+ \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_y\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_y\, v_z)}{\partial z} = \\
&- \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\,\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\,\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\,\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] \\
&- \frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \rho\, f_y
\end{aligned} \tag{86}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial t} & + \frac{\partial(\rho\, v_x\, v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_y\, v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_z\, v_z)}{\partial z} = \\
& - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\, \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\, \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\, \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] \\
& - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \rho\, f_z
\end{aligned} \tag{87}
$$

Zjednodušená vyjádření NS rovnic najdeme ve tvarech
např. pro osu z

$$
\boxed{\frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, v_z\, \boldsymbol{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho\, f_z} \quad , \tag{88}
$$

nebo obecný zápis

$$
\boxed{\frac{\partial(\rho\, v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, v_i\, v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \eta \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \rho\, f_i} \tag{89}
$$