Proudění ideálních tekutin

- Bernoulliova rovnice -

M. Jahoda

Pohybové rovnice

- Tekutina může být modelována jako nepřetržitý soubor nekonečně malých částeček tekutiny.
- Každá částice tekutiny obsahuje velké množství molekul.
- Částice tekutiny mohou nepřetržitě měnit tvar a velikost.
- Částici tekutiny představuje těleso tzv. elementární objem.
- Na částice lze přímo použít druhý Newtonův zákon, zákon síly, který říká, jak se mění rychlost v důsledku působících sil. „*Poměr změny hybnosti tělesa a doby, v níž tato změna nastala, se rovná působící síle*“.

hmotnost objemového elementu * jeho zrychlení = součet sil působících na element

časová změna hybnosti částice = součet sil působících na element

setrvačná síla částice = součet sil působících na element

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Síly působící na částici

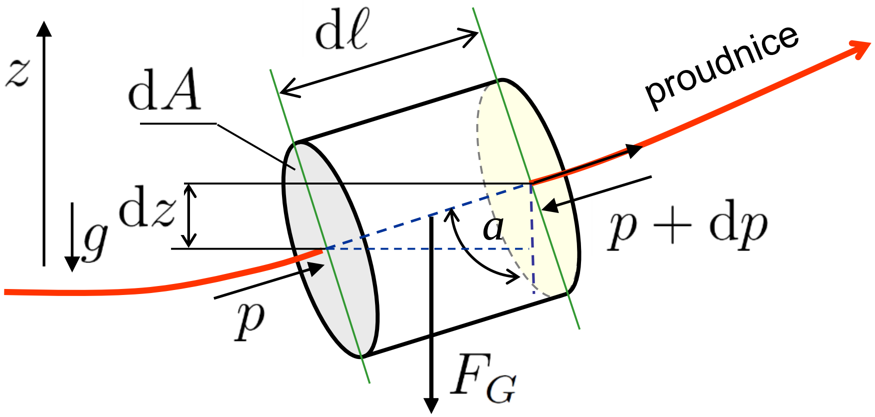
Plošné síly
- tlakové síly
- viskózní síly

Hmotnostní (objemové) síly
- gravitační síla
- odstředivá síla
- elektromagnetická síla

F – výslednice sil (N = kg m s^{-2})
a – zrychlení má týž směr jako působící síla (m s^{-2})

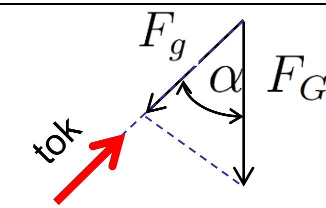
Pohybové rovnice

Eulerova rovnice hydrodynamiky (1D)



- ideální tekutina
- proudnice sleduje směr proudu tekutiny
- výsledná síla působící na elementární objem, která způsobuje zrychlení podél proudnice, je součet síly tlakové a síly gravitační

$$m = \rho \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}\ell$$



$$F_g = -F_G \cos \alpha$$

$$F_G = g\, m = g\, \rho \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}\ell$$

$$F_g = -g\, \rho \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}\ell \, \cos \alpha$$

Bilance sil

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_g + F_p$$

Gravitační síla

Tlaková síla

$$F_{p,\ \ell} = p \, \mathrm{d}A$$

$$F_{p,\ \ell+\mathrm{d}\ell} = -(p + \mathrm{d}p)\mathrm{d}A = -(p + \frac{\partial p}{\partial \ell}\mathrm{d}\ell)\, \mathrm{d}A$$

$$F_p = F_{p,\ \ell} + F_{p,\ \ell+\mathrm{d}\ell} = (p - p - \frac{\partial p}{\partial \ell}\mathrm{d}\ell)\, \mathrm{d}A$$

$$F_p = -\frac{\partial p}{\partial \ell}\mathrm{d}\ell \, \mathrm{d}A$$

Pohybové rovnice

Eulerova rovnice hydrodynamiky (1D)

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_g + F_p \quad \begin{cases} m = \rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\ell \\ F_g = -g\,\rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\ell\,\cos\alpha \\ F_p = -\dfrac{\partial p}{\partial \ell}\mathrm{d}\ell\,\mathrm{d}A \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial \ell} \end{cases}$$

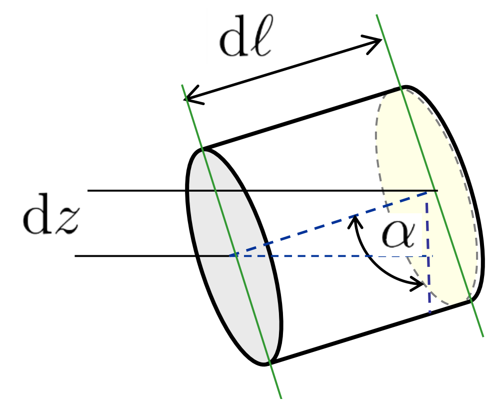
Rychlost je zde funkcí vzdálenosti a času

$$v = v(\ell, t)$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v}{\partial \ell}\mathrm{d}\ell$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v}{\partial \ell}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}$$

$$\rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\ell\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial \ell}\right) = -\rho\,g\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\ell\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial \ell}\mathrm{d}\ell\mathrm{d}A$$



$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\ell}$$

Eulerova rovnice (1D)

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial \ell} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \ell} - g\frac{\partial z}{\partial \ell}}$$

ustálený stav $\quad \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$

$$v\frac{\partial v}{\partial \ell} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \ell} - g\frac{\partial z}{\partial \ell}$$

Bernoulliova equation

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + g\,z = konst.}$$

Bernoulliova rovnice

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + g\,z = konst.$$

Kapaliny $\rho = konst.$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z = konst.}$$

Plyny $\rho = \rho(p, T)$

stlačitelnost $\frac{p}{\rho^n} = konst.$

polytropický exponent

adiabata (Q = konst.): $n = \frac{c_p}{c_V}$

$$p = C\rho^n$$

$$\mathrm{d}p = n\,C\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho$$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = n\,C \int_{\rho_1}^{\rho_1} \rho^{n-2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{n}{n-1}\,C\rho^{n-1}\Big|_1^2 = \frac{n}{n-1}\,\frac{p}{\rho}\Big|_1^2$$

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \frac{n}{n-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{n}{n-1}\frac{p_2}{\rho_2}}$$