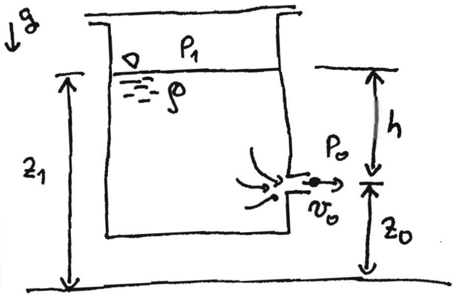
Doba výtoku kapalin

M. Jahoda

Příklady použití Eulerovy 1D (Bernoulliovy) rovnice

1) Výtok kapaliny z nádoby úzkým otvorem (ideální kapalina)



Předpoklady: $S_1 \gg S_0$

- proudění stacionární, nevířivé

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + z_1 g = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + z_0 g \qquad \text{B.r.}$$

$$v_1 S_1 = v_0 S_0 \qquad \text{r. kontinuity}$$

$$z_1 = z_0 + h$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh + \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}{1 - \frac{S_0^2}{S_1^2}}}$$

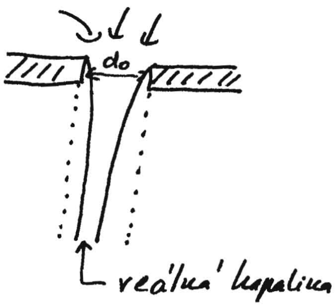
Předpoklad: $\frac{S_0^2}{S_1^2} \approx 0 \quad (S_0 \ll S_1)$

+ otevřená nádoba: $p_1 \doteq p_0$

↳ $\underline{\underline{v_0 = \sqrt{2gh}}}$ Torricelliho vzorec

- korekce pro reálné kapaliny

↳ Skutečná výtoková rychlost v (reálné kapaliny) je menší než rychlost kapaliny ideální vlivem setrvačnosti a energetickým ztrátám (třecí ztráty)

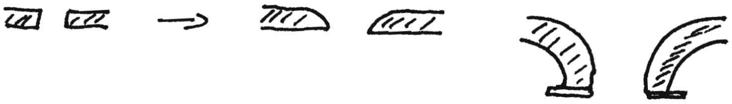


ideální tekutina by vytékala ve tvaru válce o průměru d_0 (průměr výtokového otvoru)

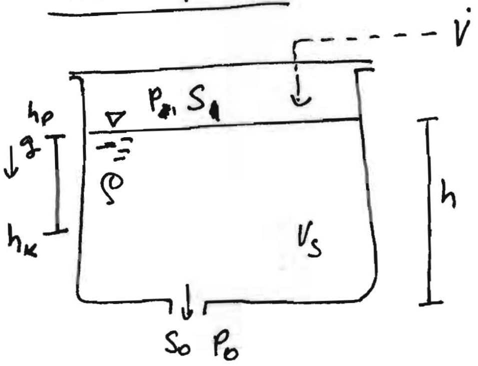
výtokový součinitel:

$$\mu = \frac{v}{v_0} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{rychlost reálné kapaliny} \\ \leftarrow \text{rychlost ideální kapaliny} \end{array}$$

ostrý otvor: $\mu \approx 0{,}6$



Doba výtoku



okamžitý obj. tok kapaliny otvorem $\dot{V}_0 = v_0 S_0$

mat. bilance (ρ = konst.)

$$\dot{V} = \dot{V}_0 + \frac{dV_s}{dt} \qquad dV_s = S\,dh$$

$$\dot{V}dt = \dot{V}_0 dt + S dh$$

$$\dot{V}dt = v_0 S_0 dt + S dh$$

$$t = \int_{h_k}^{h_p} \frac{S}{\dot{V} - v_0 S_0}\, dh$$

Integrace:

1) $\dot{V} = \dot{V}_0$ (ustálený stav) $\Rightarrow$ h = konst. $\rightarrow$ $t \rightarrow \infty$ (integrál nelze řešit)

2) $\dot{V} = 0$, S_0 = konst.

$$t = \frac{1}{S_0} \int_{h_k}^{h_p} \frac{S(h)}{v_0(h)}\, dh$$

S, v_0 jsou f-ce výšky h

za v_0 dosadíme z rovnice id. tekutiny + přidáme výtokový součinitel

$$t = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2}} \int_{h_k}^{h_p} \left(\frac{1 - \left(\frac{S_0}{S(h)}\right)^2}{\frac{p_1 - p_0}{\rho} + gh} \right)^{1/2} S(h)\, dh$$

Pokud $S_1 \gg S_0$, S = konst.

$$t = \frac{2S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left[\left(\frac{p - p_0}{\rho g} + h_p \right)^{1/2} - \left(\frac{p - p_0}{\rho g} + h_k \right)^{1/2} \right]$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

+ otevřená nádrž $p \doteq p_0$

$$t = \frac{2S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(h_p^{1/2} - h_k^{1/2} \right)$$

Příklad BR1: Doba výtoku z nádrže

Z nádrže s konstantním průřezem 1 m² vytéká voda kruhovým otvorem ve dnu nádrže s průměrem 100 mm. Za jak dlouho se nádrž vyprázdní, byla-li původně výška hladiny nad dnem 2 m a udržuje-li se v nádrži přetlak 9,85 kPa.

Předp. $S \gg S_0$, $S = konst.$

$$t = \frac{2S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left[\left(\frac{p-p_0}{\rho g} + h_p \right)^{1/2} - \left(\frac{p-p_0}{\rho g} + h_k \right)^{1/2} \right]$$

$S = 1\,m^2$

$\mu = 0{,}6$

$\rho = 1000\,kg/m^3$

$S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\,m^2$

$p - p_0 = 101325 + 9{,}85 \cdot 10^3 - 101325 = 9{,}85 \cdot 10^3\,Pa$

$h_p = 2\,m$

$h_k = 0\,m$

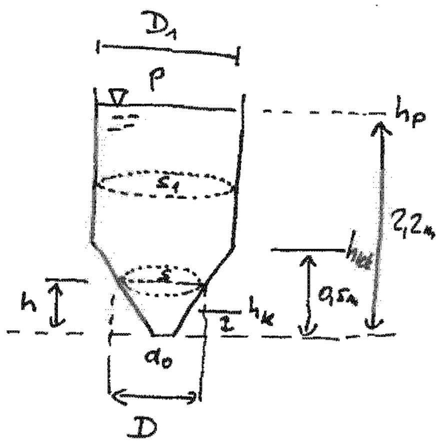
$$t = \frac{2 \cdot 1}{0{,}6 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \left[\left(\frac{9{,}85 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9{,}81} + 2 \right)^{1/2} - \left(\frac{9{,}85 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9{,}81} + 0 \right)^{1/2} \right]$$

$$t = 95{,}865 \cdot (1{,}733 - 1{,}002) = \underline{\underline{70\,s}}$$

ER15

Příklad BR2: Doba výtoku z nádrže

Otevřený válcový zásobník o průměru $D_1 = 1,2\,m$ má kónické dno. Výška komolého kužele je $0,5\,m$. Zásobník je opatřen kruhovou výpustí o průměru $d_0 = 24\,mm$ a je naplněn do výšky $h_p = 2,2\,m$. Za jakou dobu po otevření výpusti poklesne hladina v zásobníku o $2\,m$? Výtokový koeficient μ je $0,6$.



1) Doba výtoku v části s konst. průřezem S_1, $p = p_0$ (otevřená nádrž)

$S_1 \gg S_0$, $S = konst.$

$$t_1 = \frac{2 S_1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(h_p^{1/2} - h_{kk}^{1/2} \right)$$

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} = 1,131\ m^2$$

$$S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,024^2}{4} = 0,452 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$t_1 = \frac{2 \cdot 1,131}{0,6 \cdot 0,452 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \left(2,2^{1/2} - 0,5^{1/2} \right) = 1883 (1,483 - 0,707) = \underline{\underline{1461,2\ s}}$$

2) Doba výtoku v kónické části, S závisí na výšce h

platí úměra $\dfrac{D}{h} = \dfrac{D_1}{h_{kk}} \Rightarrow S(h) = \dfrac{\pi D^2}{4} = \dfrac{\pi}{4} \left(\dfrac{D_1}{h_{kk}} \right)^2 h^2$

$$t_2 = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2}} \int_{h_k}^{h_{kk}} \frac{\left(1 - \left(\frac{S_0}{S(h)}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\frac{p - p_0}{\rho} + gh\right)^{1/2}} S(h)\, dh$$

$p = p_0$

$$t_2 = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2}} \int_{h_k}^{h_{kk}} \frac{1 - \left(\frac{S_0}{S(h)}\right)}{g^{1/2} h^{1/2}} S(h)\, dh$$

$S_0 \ll S(h) \rightsquigarrow \dfrac{S_0}{S(h)} \approx 0$ $\left(\text{chyba: } \dfrac{2 d_0}{D_1 - d_0} \right)$

$$t_2 = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_k}^{h_{kk}} S(h)\, h^{-1/2}\, dh$$

Příklad BR2 (pokrač.)

$$t_2 = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_K}^{h_{KK}} S(h)\, h^{-1/2}\, dh = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_K}^{h_{KK}} \frac{\pi}{4}\left(\frac{D_1}{h_{KK}}\right)^2 h^2\, h^{-1/2}\, dh$$

$$t_2 = \frac{\pi D_1^2}{4 \cdot \mu S_0 h_{KK}^2 \sqrt{2g}} \int_{h_K}^{h_{KK}} h^{3/2}\, dh$$

$$t_2 = \frac{2}{5} \frac{\pi D_1^2}{4 \mu S_0 h_{KK}^2 \sqrt{2g}} \left(h_{KK}^{5/2} - h_K^{5/2}\right)$$

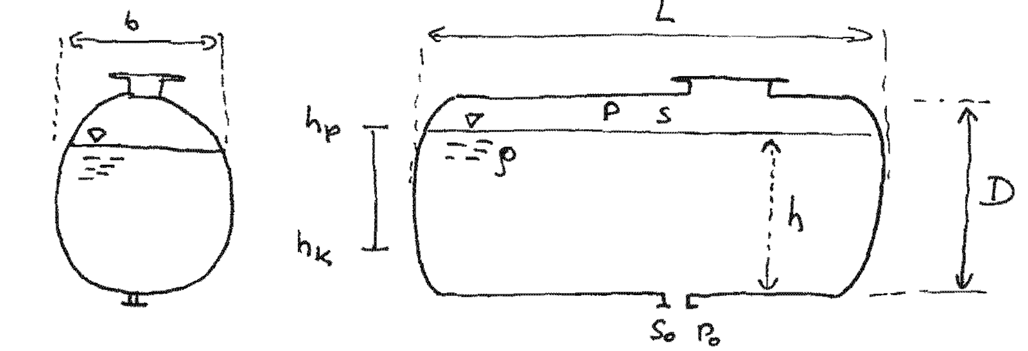
$$t_2 = \frac{2}{5} \frac{\pi \cdot 1{,}2^2}{4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}452 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \left(0{,}5^{5/2} - 0{,}2^{5/2}\right)$$

$$t_2 = 1506{,}4 \cdot (0{,}17677 - 0{,}01788) = 239{,}35\ s$$

$$t = t_1 + t_2 = 1461{,}2 + 239{,}35 \doteq 1700{,}5\ s \rightsquigarrow 28{,}34\ min$$

Hladina v zásobníku klesne z původní úrovně o 2m za 28,34 min.

Doba výtoku z válcové nádrže



S se mění s výškou

šířka: $b = 2\sqrt{h(D-h)}$ $\qquad S(h) = L\,b$

$\boxed{S \gg S_0,\ p_0 = p}$

$$t = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_k}^{h_p} \frac{S(h)}{h^{1/2}}\, dh$$

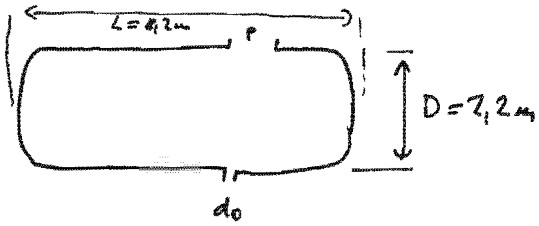
$$t = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_k}^{h_p} \frac{2L\left[h\cdot(D-h)\right]^{1/2}}{h^{1/2}}\, dh$$

$$t = \frac{2L}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_k}^{h_p} (D-h)^{1/2}\, dh$$

Příklad BR3: Doba výtoku z válcové nádrže

Vypočítejte čas, za který se vyprázdní cisterna naplněná etanolem otvorem o průměru $d_0 = 100\,mm$, výtokový koeficient $\mu = 0{,}62$.

Cisterna je 8,2 m dlouhá a má průměr 2,2 m



$$\boxed{S_0 \gg S,\ p = p_0}$$

$$t = \frac{2L}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_0^D (D-h)^{1/2}\, dh$$

$$t = \frac{4 L D \sqrt{D}}{3 \mu S_0 \sqrt{2g}}$$

$L = 8{,}2\,m$ $\quad S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\,m^2$

$D = 2{,}2\,m$ $\quad \mu = 0{,}62$

$$t = \frac{4 \cdot 8{,}2 \cdot 2{,}2 \cdot \sqrt{2{,}2}}{3 \cdot 0{,}62 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} = \underline{\underline{1655\,s}} \rightarrow 27{,}6\,min$$